מבוא מתמטי לפיזיקה 1 — תרגול 5

מתרגל: אליאור אוריסמן

תוכן העניינים

1 מספרים מרוכבים חלק ב' 2

1.1 הסבר קצר 2

1.1.1 הצגה פולארית 2

1.1.2 נוסחת אוילר 4

1.1.3 נוסחת דמואבר 4

1.1.4 שורשים 4

1 מספרים מרוכבים חלק ב'

1.1 הסבר קצר

נגדיר מספר מדומה $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ ומספר מרוכב הוא מהצורה $z = a + ib$ ($z \in \mathbb{C}$). לכל מספר מרוכב קיים מספר צמוד הניתן ע"י פעולת ההצמדה $\mathrm{i} \to -\mathrm{i}$:

$$z^* = \bar{z} = a - ib. \tag{1.1}$$

כאשר קיימות נוטציות שונות בספרות (לעיתים עם משמעות נלוות). מתקיים תמיד כי הערך המוחלט הוא מספר ממשי:

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2+b^2}. \tag{1.2}$$

נשים לב ש z^2 ו $|z|^2$הם מספרים שונים. (ודאו). נרצה גם לדעת איך לחלץ את החלק הממשי ואת החלק המדומה.

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(z) &= \mathscr{R}e\,(z) = \frac{z+z^*}{2},\\ \mathrm{Im}\,(z) &= \mathscr{I}m\,(z) = \frac{z-z^*}{2},\end{aligned}$$

כאשר קיימות נוטציות שונות.

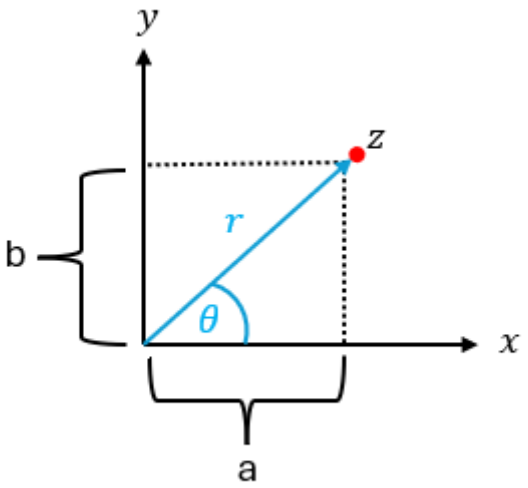
1.1.1 הצגה פולארית

הצגה שימושית מאד בפיזיקה לבעיות עם סימטריה מעגלית היא הצגה פולרית. במקום לעבוד עם הקואורדינטות x ו-y (קרטזיות), עוברים למערכת של קואורדינטות r ו- ϕ ואז המספר המרוכב נכתב כך

$$z = r\left(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi\right). \tag{1.3}$$

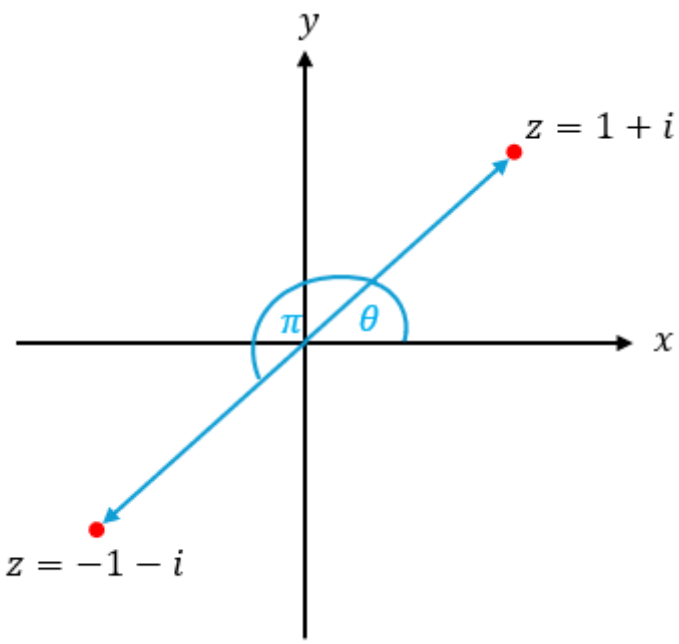
כאשר הקשר למערכת הקודמת ניתן ע"י

$$\begin{aligned}r &= |z| = \sqrt{a^2+b^2},\\ \phi &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right).\end{aligned}$$



איור 1: המרחב המרוכב בעזרת (x, y) ו-(r, ϕ).

הערה לגבי הזווית: נשים לב שעבור ϕ יש מספר פתרונות. לדוגמה אפשר לקחת $a \to -a$ ו $b \to -b$, עדיין נקבל $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, אבל מדובר במספר מרוכב אחר! לדוגמה : $z = 1 + i$, זה מספר מרוכב ברביע הראשון עם $r = \sqrt{2}$ ו- $\phi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$. אבל אם נסתכל על מספור מרוכב אחר $z = -1 - i$, זה מספר שנמצא ברביע השלישי, אבל ניכר שיש לו $r = \sqrt{2}$ ו- $\phi = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{\pi}{4}$. הרדיוס נכון, אבל אם תייצרו את המספר הזה, תיהיה לו זווית $\phi = \frac{\pi}{4} + \pi$.



איור 2: המרחב המרוכב בעזרת (x, y) ו-(r, ϕ).

1.1.2 נוסחת אוילר

הצגה שימושית של ההצגה הפולרית:

$$z = |z| \left(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi\right) = re^{\mathrm{i}\phi}. \tag{1.4}$$

מכאן ניתן לבדוק הכפלה וחילוק

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 e^{\mathrm{i}\phi_1} \cdot r_2 e^{\mathrm{i}\phi_2} = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{\mathrm{i}\phi_1}}{r_2 e^{\mathrm{i}\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathrm{i}(\phi_1-\phi_2)}. \end{aligned}$$

1.1.3 נוסחת דמואבר

עבור p ממשי ושלם עם $p \geq 1$ מתקיים ש-

$$z^p = r^p \left(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi\right)^p = r^p \left(\cos\left(p\phi\right) + \mathrm{i}\sin\left(p\phi\right)\right) \tag{1.5}$$

1.1.4 שורשים

נרצה לפתור משוואת מהצורה הבאה

$$z^n = u. \tag{1.6}$$

נניח ראשית ש- $z = \rho\left(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi\right)$ ו $u = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$. משפט דה-מואבר אומר ש-

$$z^n = \rho^n \left(\cos\left(n\phi\right) + \mathrm{i}\sin\left(n\phi\right)\right). \tag{1.7}$$

מכאן ש-

$$\begin{aligned} \rho^n &= r, \\ n\phi &= \theta + 2\pi k. \end{aligned}$$

עם k שלם. נחזור להגדרה של z ונקבל

$$z = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right) = r^{1/n}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}. \tag{1.8}$$

אמנם k יכול להיות כל שלם, אבל פתרונות יחודיים יש רק עבור $k = 0, 1, ..., n-1$ כאשר פתרונות אחרים חוזרים על עצמם (סה"כ n פתרונות).

שאלה 1

הבאו לצורה של $a + \mathrm{i}b$ את הביטוי $z = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
z &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)} + e^{-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{r}}e^{\frac{i^2}{2}} + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}e^{\frac{-i^2}{2}}}{2} \\
&= \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}e^{\frac{-1}{2}} + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}e^{\frac{1}{2}}}{2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{1}{2}}(1+i) + e^{\frac{1}{2}}(1-i)\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{i}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh(1/2) - \frac{i}{\sqrt{2}}\sinh(1/2)
\end{aligned}$$

כאשר בשורה השניה השתמשנו בעובדה ש- $\cos(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}$ ובשורה החמישית בעובדה ש:

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} &= \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) \\
e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} &= \cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)
\end{aligned}$$

הערה : $\sin(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2i}$ ו-$\cos(x)$ נובעים מנוסחת אוילר.

שאלה 2

מצאו את השורשים של המשוואה $z^4 = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

צריך להבין עבור $w = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, מהם θ ו -r ואז להשתמש בנוסחת השורשים של דה-מואבר. נפשט את w כדי להביא לצורה $w = a + ib$

$$w = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1+2\mathrm{i}-1) = \frac{1}{2}2\mathrm{i} = \mathrm{i}. \tag{1.9}$$

מכאן ש- $w = \mathrm{i}$, ולכן $r = \sqrt{0^2+1^2} = 1$ ו -$\theta = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = \pi/2$. הולכים לנוסחה עם $n = 4$

$$\begin{aligned} z &= r^{1/n} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} \\ &= \exp\left[i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}\right)\right], \quad k = 0,1,2,3. \end{aligned}$$

תרגילון 1

בדקו ש$\sinh(x)$ ו-$\cosh(x)$ קשורים ל-$\sin(x)$ ו-$\cos(x)$ דרך הפעולה הבא:

$$x \to ix \tag{1.10}$$

תרגילון 2

בדקו בעזרת הגדרות של $\sin(x)$ ו-$\cos(x)$ את הזהות

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \tag{1.11}$$

שאלה 3

פתרו את המשוואה הריבועית הבאה

$$z^2 - (3+3\mathrm{i})\,z - 6 + 2\mathrm{i} = 0 \tag{1.12}$$

נמצא ראשית את השורשים בשיטה המוכרת

$$
\begin{aligned}
z_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{3+3\mathrm{i} \pm \sqrt{(3+3\mathrm{i})^2 - 4\cdot 1\cdot(-6+2\mathrm{i})}}{2} \\
&= \frac{3+3\mathrm{i} \pm \sqrt{9+18\mathrm{i}-9+42-8\mathrm{i}}}{2} = \frac{3+3\mathrm{i} \pm \sqrt{10\mathrm{i}+24}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[3+3\mathrm{i} \pm \sqrt{\sqrt{10^2+24^2}e^{\mathrm{i}\tan\left(\frac{10}{24}\right)}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[3+3\mathrm{i} \pm \sqrt{26e^{\mathrm{i}0.395}}\right] = \frac{1}{2}\left[3+3\mathrm{i} \pm \sqrt{26}e^{\mathrm{i}0.1975}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(3+3\mathrm{i} \pm (5+\mathrm{i})\right)
\end{aligned}
$$

כאשר בשלב האחרון מצאנו את a ו-b של $\sqrt{26}e^{\mathrm{i}0.1975}$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{26}e^{\mathrm{i}0.1975} &= \sqrt{26}\left(\cos(0.1975) + \mathrm{i}\sin(0.1975)\right) \\
&= 5+\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

שאלה 4

חשבו את $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)}$

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)} &= e^{\ln\left(\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)}\right)} \\
&= e^{\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)\ln\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)} \\
&= e^{\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)\ln\left(\sqrt{3+1}e^{\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\right)} \\
&= e^{\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)\left[\ln 2+\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\pi\mathrm{i}k\right]} \\
&= e^{\left(\frac{\ln 2}{2}-\pi\left(\frac{1}{6}+2k\right)\right)}e^{i\left(\ln 2+\pi\left(\frac{1}{12}+k\right)\right)}
\end{aligned}
$$

עם $k = 0, \pm 1, \pm 2...$. בשלב השלישי נעזרנו בהגדרת של לוגירתם של מספר מרוכב:

$$
\ln z = \ln\left(re^{\mathrm{i}\phi}\right) = \ln r + \ln\left(e^{\mathrm{i}\phi}\right) = \ln r + \mathrm{i}\phi + 2\pi\mathrm{i}k \tag{1.13}
$$

נזכר ש-$2\pi\mathrm{i}k$ נובע מהמחזוריות של $\cos(x)$ ו-$\sin(x)$ ($e^{2\pi\mathrm{i}k} = 1$).

בעצם קיבלנו הצגת אוילר עם

$$r_{k=0} \approx 0.837$$
$$\phi_{k=0} \approx 0.955$$

שאלה 5

מצאו את כל הפתרונות של המשוואה : $e^{z^2} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

ניקח לוגריתם לשני האגפים. נשים לב שיש מספר אינסופי של ענפים ללוגריתם

$$z^2 = \ln\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right) = \ln\left(\sqrt{3+1}e^{\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\right) = \ln 2 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \tag{1.14}$$

עם $k = 0, \pm 1, \pm 2...$. נרשום בהצגת אוילר

$$z^2 = \sqrt{(\ln 2)^2 + \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)^2}\, e^{\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{\ln 2}\right)} \tag{1.15}$$

וניקח שורש (משפט דה-מואבר)

$$z_{k,n} = \left((\ln 2)^2 + \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)^2\right)^{1/4} e^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{\ln 2}\right) + \pi n\right)} \tag{1.16}$$

עם $k = 0, \pm 1, \pm 2...$ ו- $n = 0, 1$.